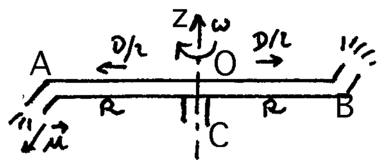
Tourniquet hydraulique.



Un tourniquet est formé de deux branches de rayon R, éjectant chacune, à une vitesse relative u orthoradiale vers l'arrière, de l'eau avec un débit massique $D/2$. Il est alimenté par une canalisation verticale fixe amenant le débit total D.

La liaison entre canalisation d'amenée et tourniquet est supposée sans frottement et sans fuite (le beurre et l'argent du beurre !)

On admettra que le moment cinétique par rapport à l'axe du tourniquet est le produit d'une constante J, considérée comme donnée du problème, et de sa vitesse angulaire ω, même si le fluide coule dans les branches.

Question 1 :
On suppose le régime permanent atteint, quelle est la vitesse de rotation du tourniquet ?

Puisqu'il s'agit d'un problème de rotation autour de l'axe Oz vertical, on va utiliser le théorème du moment cinétique en O, projeté sur Oz.

Le tourniquet est un système *ouvert*. Construisons comme suit un système *fermé* : à l'instant t, il est formé du tourniquet et de l'eau qui va y entrer entre t et $t + \mathrm{d}t$ et à l'instant $t + \mathrm{d}t$, il est donc constitué du tourniquet et de l'eau qui en est sortie entre t et $t + \mathrm{d}t$.

A l'instant t, la composante selon Oz du moment cinétique en O du système est la somme de celle du tourniquet, soit $J\,\omega$ par hypothèse et de celle, notée $\delta\sigma_e$, de la masse $D\,\mathrm{d}t$ d'eau qui entre avec

$$\delta\sigma_e = \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{\delta\sigma_e} = \overrightarrow{e_z} \cdot \left(\overrightarrow{OC} \wedge \delta\, m\, \overrightarrow{V_e}\right)$$

et il est inutile d'approfondir car $\overrightarrow{V_e}$ est parallèle à $\overrightarrow{e_z}$ et $\delta\sigma_e$ est donc nul. Donc

$$\sigma_z(t) = J\,\omega$$

A l'instant $t + \mathrm{d}t$, la composante selon Oz du moment cinétique en O du système est la somme de celle du tourniquet, soit $J\,\omega$ par hypothèse (le régime est permanent est ω est donc indépendant du temps) et de celles, notées $\delta\sigma_1$ et $\delta\sigma_2$ des masses $D\,\mathrm{d}t/2$ d'eau qui sortent en A et B avec

$$\delta\sigma_1 = \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{\delta\sigma_1} = \overrightarrow{e_z} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \wedge \delta\, m_1\, \overrightarrow{V_1}\right)$$

où $\delta m_1 = D\,\mathrm{d}t/2$ et $\overrightarrow{V_1}$ est la somme de la vitesse d'entraînement $R\,\omega\,\overrightarrow{e_\theta}$ et de la vitesse relative d'éjection $-u\,\overrightarrow{e_\theta}$ ($\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur unitaire orthoradial). Donc

$$\delta\sigma_1 = \overrightarrow{e_z} \cdot \left(R\,\overrightarrow{e_r} \wedge \frac{D}{2}\,\mathrm{d}t\,(R\,\omega - u)\,\overrightarrow{e_\theta}\right) = \frac{D}{2}\,R\,(R\,\omega - u)\,\mathrm{d}t$$

Le calcul de $\delta\sigma_2$ conduit au même résultat et donc

$$\sigma_z(t + \mathrm{d}t) = J\,\omega + D\,R\,(R\,\omega - u)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma(t+\mathrm{d}t) - \sigma(t)}{\mathrm{d}t} = D\,R\,(R\,\omega - u)$$

Cette dérivée est la somme des moments, projetés sur Oz, des forces exercées sur le tourniquet. La premier force est le poids dont le moment est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_z} = \overrightarrow{e_z} \cdot \left(\overrightarrow{OG} \wedge M\,\overrightarrow{g}\right)$$

et il est inutile d'approfondir car $\overrightarrow{g}$ (et même $\overrightarrow{OG}$) est parallèle à $\overrightarrow{e_z}$ donc le moment est nul. Il en est de même pour la réaction du support car elle est opposée au poids donc elle aussi verticale et $\overrightarrow{\mathcal{M}_{z,tot}} = 0$.

Le théorème du moment cinétique donne donc

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = D\,R\,(R\,\omega - u) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{z,tot}} = 0$$

donc

$$\boxed{\omega = \frac{u}{R}}$$

Question 2 :
Montrer que s'il y a frottement, la vitesse angulaire est inférieure à celle qu'on vient de calculer. On modélisera le frottement par un moment proportionnel à ω.

On rajoute un troisième moment de la forme $-\lambda\,\omega$ et la même étude conduit à

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = D\,R\,(R\,\omega - u) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{z,tot}} = -\lambda\,\omega$$

donc

$$\boxed{\omega = \frac{u}{R\,\left(1 + \frac{\lambda}{D\,R^2}\right)}}$$

Question 3 :
Etudier le régime transitoire.

On reprend la même étude avec ω dépendant du temps, soit en grillant les étapes :

$$\sigma_z(t) = J\,\omega(t)$$
$$\sigma_z(t+\mathrm{d}t) = J\,\omega(t+\mathrm{d}t) + D\,R\,(R\,\omega - u)\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma(t+\mathrm{d}t) - \sigma(t)}{\mathrm{d}t} = J\,\frac{\omega(t+\mathrm{d}t) - \omega(t)}{\mathrm{d}t} + D\,R\,(R\,\omega - u) = J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + D\,R\,(R\,\omega - u)$$

d'où

$$J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + D\,R\,(R\,\omega - u) = -\lambda\,\omega$$

qu'on réécrit

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega = \omega_\infty$$

avec $\omega_\infty = \dfrac{u}{R}$ (valeur trouvée plus haut) et $\tau = \dfrac{J}{\lambda + D\,R^2}$

On trouvera classiquement si l'on part du repos :

$$\boxed{\omega(t) = \omega_\infty\,(1 - \exp(t/\tau))}$$

Question 4, par curiosité :

Calculer J, sans utiliser la mécanique du solide, lorsque la section des tuyaux est négligeable devant R.

Le tourniquet se compose d'une partie verticale d'axe confondu avec Oz et de deux branches. Pour la partie verticale, le métal a des vitesses orthoradiales négligeables et l'eau a en plus une vitesse verticale, ce qui donne, par un raisonnement utilisé plus haut un moment nul.

Pour chacune des branches, coupons la en une petite tranche entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$. Le métal a une masse $\mu_1\,\mathrm{d}r$ (μ_1 est une masse linéique) et une vitesse orthoradiale $r\,\omega\,\overrightarrow{e_\theta}$; le vecteur position est $r\,\overrightarrow{e_r}$ donc le moment cinétique élémentaire en O est :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma} = \mu_1\,\mathrm{d}r\,(r\,\overrightarrow{e_r}) \wedge (r\,\omega\,\overrightarrow{e_\theta}) = \mu_1\,r^2\,\mathrm{d}r\,\omega\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\mathrm{d}\sigma_z = \mu_1\,r^2\,\mathrm{d}r\,\omega$$

Pour l'eau dans la même portion (masse $\mu_2\,\mathrm{d}r$), il faut *a priori* tenir compte d'une vitesse radiale $U\,\overrightarrow{e_r}$ dont le module U est lié au débit ; on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma} = \mu_2\,\mathrm{d}r\,(r\,\overrightarrow{e_r}) \wedge (U\,\overrightarrow{e_r} + r\,\omega\,\overrightarrow{e_\theta}) = \mu_2\,r^2\,\mathrm{d}r\,\omega\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\mathrm{d}\sigma_z = \mu_2\,r^2\,\mathrm{d}r\,\omega$$

où l'on remarque que le mouvement de l'eau dans le tuyau est sans influence sur le résultat puisque U disparaît. Il ne reste qu'à additionner ces deux termes et intégrer, soit, en posant $\mu = \mu_1 + \mu_2$

$$\sigma_z = \mu\,\omega \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\,\mu\,R^3\,\omega$$

On double ce résultat puisqu'il y a deux branches et on introduit la masse totale M des deux branches (et non du tourniquet, on exclut donc la partie verticale) en remplaçant μ par $M/(2\,R)$:

$$\sigma_{z,tot} = \frac{2}{3}\,\mu\,R^3\,\omega = \frac{1}{3}\,M\,R^2\,\omega = J\,\omega$$

avec

$$\boxed{J = \frac{1}{3}\,M\,R^2}$$